DISPENSE DI GEOMETRIA

CON COSTRUZIONI GEOMETRICHE IN GEOGEBRA

PARTE SECONDA

I TRIANGOLI

Prof. Emanuela Botta

A.S. 2011/2012

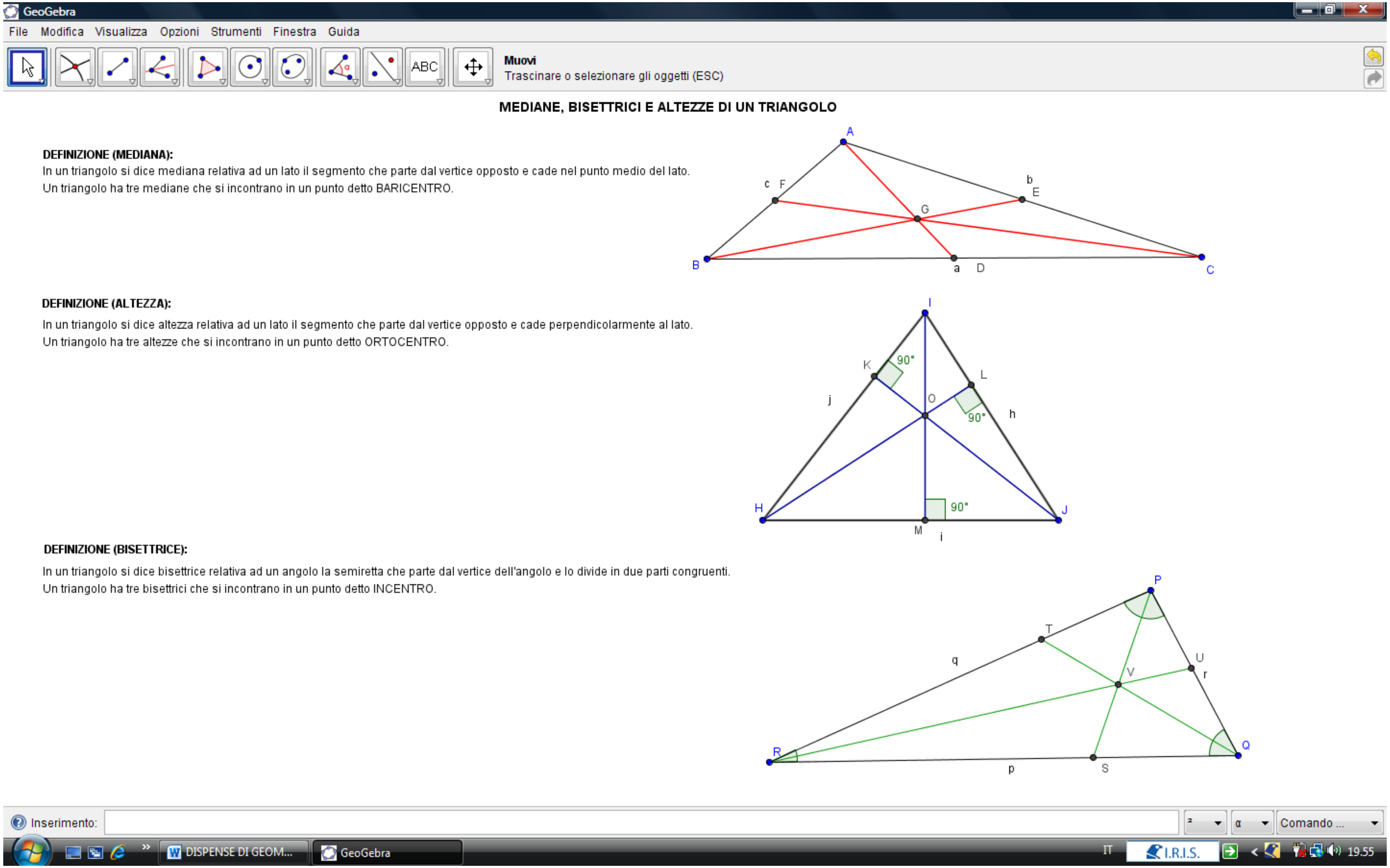
Ogni costruzione geometrica presentata è corredata dalle nozioni di base di geometria euclidea cui fa riferimento, per cui l'insieme delle costruzioni costituisce una sintetica dispensa del modulo di geometria relativo al primo anno del corso delle scuole superiori.

La dispensa non è esaustiva e deve essere integrata dalle lezioni in classe o in laboratorio.

Il protocollo di costruzione allegato a ciascuna costruzione è la guida per gli studenti per la realizzazione in autonomia della stessa costruzione.

Avvertenza: le costruzioni debbono essere effettuate senza tenere conto delle coordinate specifiche dei punti o delle equazioni assegnate per le rette poiché si costruisce sul piano libero, privo di assi cartesiani, in cui non è stato introdotto il concetto di misura, come quando si effettuano le classiche costruzioni con riga e compasso.

COSTRUZIONE 1: MEDIANE, ALTEZZE E BISETTRICI DI UN TRIANGOLO



Protocollo di costruzione 1 – mediane, altezze e bisettrici di un triangolo

N.	Nome	Comando	Valore
1	Testo testo1		testo1 = "MEDIANE, BISETTRICI E ALTEZZE DI UN TRIANGOLO"
2	Testo testo2		testo2 = "DEFINIZIONE (MEDIANA):"
3	Testo testo3		testo3 = "In un triangolo si dice mediana relativa ad un lato il segmento che parte dal vertice opposto e cade nel punto medio del lato. Un triangolo ha tre mediane che si incontrano in un punto detto BARICENTRO."
4	Punto A		A = (13.2, 5.28)
5	Punto B		B = (10.36, 2.84)
6	Punto C		C = (20.66, 2.88)
7	Triangolo poli1	Poligono[A, B, C]	poli1 = 12.51
7	Segmento c	Segmento[A, B, poli1]	c = 3.74
7	Segmento a	Segmento[B, C, poli1]	a = 10.3
7	Segmento b	Segmento[C, A, poli1]	b = 7.84
8	Punto D	PuntoMedio[a]	D = (15.51, 2.86)
9	Segmento d	Segmento[A, D]	d = 3.35
10	Punto E	PuntoMedio[b]	E = (16.93, 4.08)
11	Punto F	PuntoMedio[c]	F = (11.78, 4.06)
12	Segmento e	Segmento[B, E]	e = 6.69
13	Segmento f	Segmento[C, F]	f = 8.96
14	Punto G	Intersezione[d, e]	G = (14.74, 3.67)
15	Testo testo5		testo5 = "DEFINIZIONE (ALTEZZA):"
16	Testo testo6		testo6 = "In un triangolo si dice altezza relativa ad un lato il segmento che parte dal vertice opposto e cade perpendicolarmente al lato. Un triangolo ha tre altezze che si incontrano in un punto detto ORTOCENTRO."
17	Punto H		H = (11.52, -2.6)
18	Punto I		I = (14.9, 1.72)
19	Punto J		J = (17.68, -2.6)
20	Triangolo poli2	Poligono[H, I, J]	poli2 = 13.31
20	Segmento j	Segmento[H, I, poli2]	j = 5.49
20	Segmento h	Segmento[I, J, poli2]	h = 5.14
20	Segmento i	Segmento[J, H, poli2]	i = 6.16

21	Retta g	Perpendicolare[I, i]	g: x = 14.9 (nascondi oggetto)
22	Retta k	Perpendicolare[J, j]	k: -3.38x - 4.32y = -48.53 (nascondi oggetto)
23	Retta l	Perpendicolare[H, h]	l: -2.78x + 4.32y = -43.26 (nascondi oggetto)
24	Punto K	Intersezione[k, j]	K = (13.86, 0.39)
25	Punto L	Intersezione[l, h]	L = (15.88, 0.2)
26	Punto M	Intersezione[g, i]	M = (14.9, -2.6)
27	Segmento m	Segmento[J, K]	m = 4.85
28	Segmento n	Segmento[I, M]	n = 4.32
29	Segmento p_1	Segmento[H, L]	p_1 = 5.18
30	Angolo α	Angolo[J, M, I]	α = 90°
31	Angolo β	Angolo[H, L, J]	β = 90°
32	Angolo γ	Angolo[J, K, I]	γ = 90°
33	Testo testo4		testo4 = "DEFINIZIONE (BISETTRICE):"
34	Testo testo7		testo7 = "In un triangolo si dice bisettrice relativa ad un angolo la semiretta che parte dal vertice dell'angolo e lo divide in due parti congruenti. Un triangolo ha tre bisettrici che si incontrano in un punto detto INCENTRO."
35	Punto R		R = (11.66, -7.64)
36	Punto P		P = (19.6, -4.06)
37	Punto Q		Q = (21.42, -7.5)
38	Triangolo poli3	Poligono[R, P, Q]	poli3 = 16.91
38	Segmento q	Segmento[R, P, poli3]	q = 8.71
38	Segmento r	Segmento[P, Q, poli3]	r = 3.89
38	Segmento p	Segmento[Q, R, poli3]	p = 9.76
39	Angolo δ	Angolo[Q, R, P]	δ = 23.45°
40	Angolo ε	Angolo[R, P, Q]	ε = 93.61°
41	Angolo ζ	Angolo[P, Q, R]	ζ = 62.94°
42	Retta q_1	Bisettrice[q, p]	q_1: -0.98x - 0.22y = -9.72 (nascondi oggetto)
42	Retta r_1	Bisettrice[q, p]	r_1: 0.22x - 0.98y = 9.99 (nascondi oggetto)
43	Retta s	Bisettrice[q, r]	s: 0.32x + 0.95y = 2.52 (nascondi oggetto)
43	Retta t	Bisettrice[q, r]	t: -0.95x + 0.32y = -19.86 (nascondi oggetto)
44	Retta a_1	Bisettrice[r, p]	a_1: 0.86x - 0.51y = 22.25 (nascondi oggetto)

44	Retta b_1	Bisettrice[r, p]	b_1: 0.51x + 0.86y = 4.47 (nascondi oggetto)
45	Punto U	Intersezione[r_1, r]	U = (20.46, -5.68)
46	Punto T	Intersezione[b_1, q]	T = (17.34, -5.08)
47	Punto S	Intersezione[t, p]	S = (18.41, -7.54)
48	Segmento c_1	Segmento[P, S]	c_1 = 3.68
49	Segmento d_1	Segmento[Q, T]	d_1 = 4.75
50	Segmento e_1	Segmento[R, U]	e_1 = 9.01
51	Punto O	Intersezione[m, n]	O = (14.9, -0.42)
52	Punto V	Intersezione[c_1, e_1]	V = (18.93, -6.02)

ESERCIZI:

Esegui le costruzioni richieste.

Disegna mediane, altezze e bisettrici per:

a. un triangolo acutangolo,
b. un triangolo ottusangolo,
c. un triangolo rettangolo

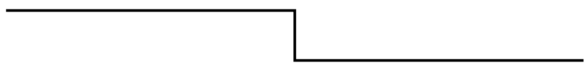
e osserva la posizione in cui si vengono a trovare in ognuno dei nove disegni baricentro, ortocentro e incentro.
Quale di questi è sempre interno al triangolo? Quale può coincidere con uno degli estremi del triangolo e in quale caso?

APPUNTI…

Nel piano oltre a rette e segmenti possiamo disegnare un'infinità varietà di figure e di linee.

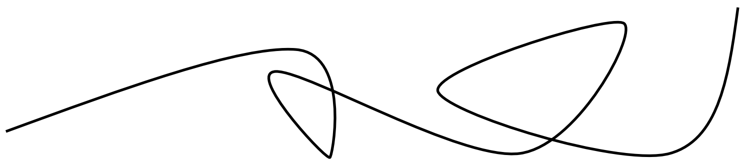
Possiamo distinguere le linee in **rette**, **curve** e **spezzate.**
Una linea curva è caratterizzata da un continuo cambio di direzione, mentre una linea spezzata, poligonale, è costituita da una serie di segmenti consecutivi, in ciascuno dei quali la direzione si mantiene costante.

linea curva semplice

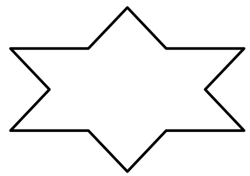


linea spezzata semplice

Le linee possono essere semplici, se non ritornano mai su se stesse, o intrecciate, se passano più volte per uno stesso punto.
Le linee possono inoltre essere aperte o chiuse, se il primo e l'ultimo punto coincidono.



linea curva intrecciata aperta

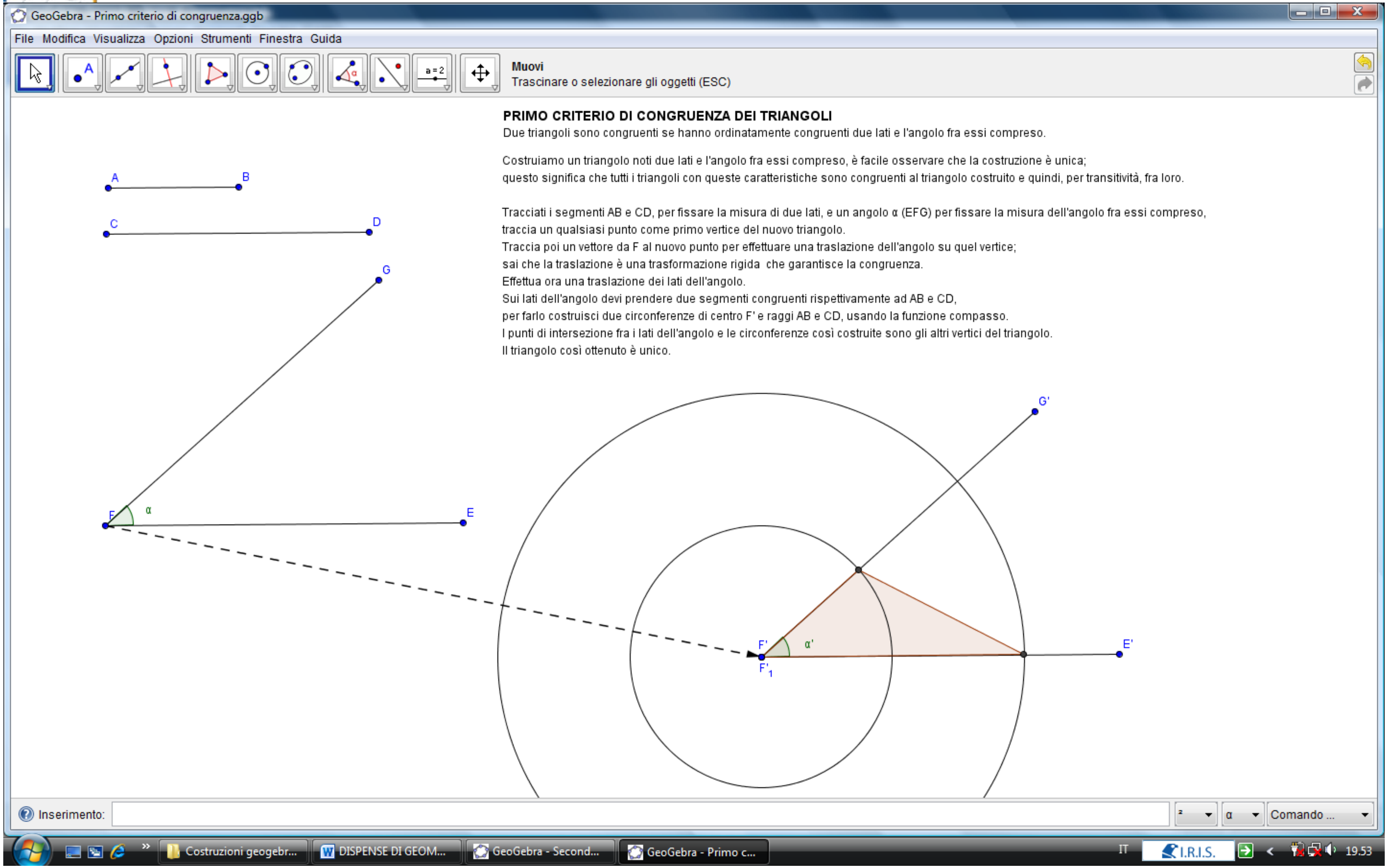


linea spezzata semplice chiusa

Definizione 1: chiameremo ***triangolo*** una figura piana costituita da una poligonale chiusa con tre lati e dai suoi punti interni.
Possiamo classificare i triangoli sia in base agli angoli sia in base ai lati:

Classificazione in base agli angoli		**Classificazione in base ai lati**	
Triangolo acutangolo	Ha tutti gli angoli acuti	Triangolo scaleno	Ha tre lati fra loro non congruenti
Triangolo ottusangolo	Ha un angolo ottuso	Triangolo isoscele	Ha due lati congruenti
Triangolo rettangolo	Ha un angolo retto	Triangolo equilatero	Ha tre lati congruenti

COSTRUZIONE 2: PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

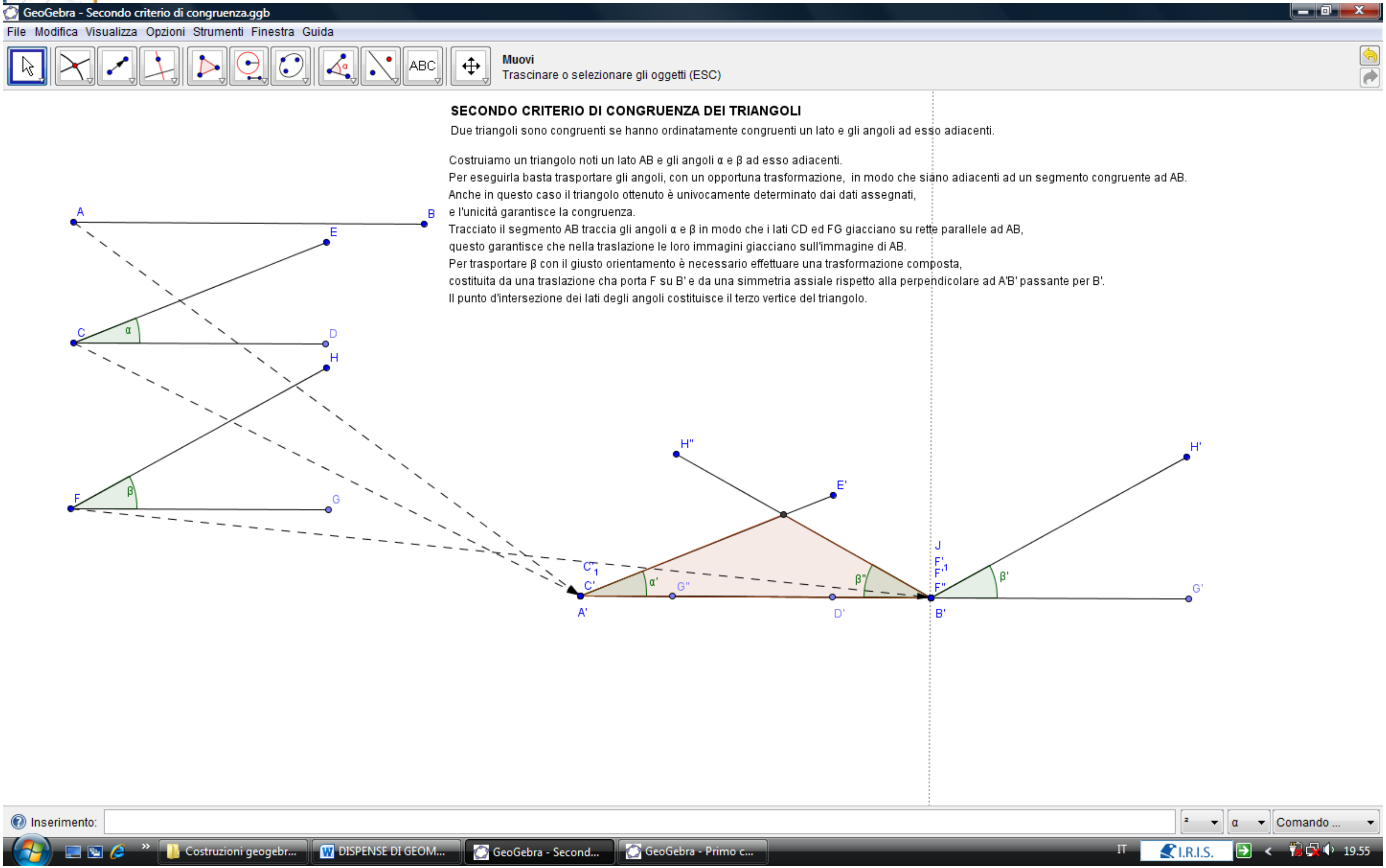


Protocollo di costruzione 2 – Primo criterio di congruenza dei triangoli			
N.	**Nome**	**Comando**	**Valore**

1	Testo testo1		testo1 = "PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI"
2	Testo testo2		testo2 = "Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso."
3	Testo testo3		testo3 = "Costruiamo un triangolo noti due lati e l'angolo fra essi compreso, è facile osservare che la costruzione è unica; questo significa che tutti i triangoli con queste caratteristiche sono congruenti al triangolo costruito e quindi, per transitività, fra loro. Tracciati i segmenti AB e CD, per fissare la misura di due lati, e un angolo α (EFG) per fissare la misura dell'angolo fra essi compreso, traccia un qualsiasi punto come primo vertice del nuovo triangolo. Traccia poi un vettore da F al nuovo punto per effettuare una traslazione dell'angolo su quel vertice; sai che la traslazione è una trasformazione rigida che garantisce la congruenza. Effettua ora una traslazione dei lati dell'angolo. Sui lati dell'angolo devi prendere due segmenti congruenti rispettivamente ad AB e CD, per farlo costruisci due circonferenze di centro F' e raggi AB e CD, usando la funzione compasso. I punti di intersezione fra i lati dell'angolo e le circonferenze così costruite sono gli altri vertici del triangolo. Il triangolo così ottenuto è unico."
4	Punto A		A = (-2.36, 4.28)
5	Punto B		B = (0.36, 4.3)
6	Segmento a	Segmento[A, B]	a = 2.72
7	Punto C		C = (-2.4, 3.32)
8	Punto D		D = (3.08, 3.36)
9	Segmento b	Segmento[C, D]	b = 5.48
10	Punto E		E = (5.04, -2.7)
11	Punto F		F = (-2.42, -2.76)
12	Punto G		G = (3.28, 2.36)
13	Angolo α	Angolo[E, F, G]	α = 41.47°
14	Segmento c	Segmento[E, F]	c = 7.46
15	Segmento d	Segmento[G, F]	d = 7.66
16	Punto H		H = (11.26, -5.5)
17	Vettore u	Vettore[F, H]	u = (13.68, -2.74)
18	Punto E'	Trasla[E, u]	E' = (18.72, -5.44)
19	Punto F'_1	Trasla[F, u]	F'_1 = (11.26, -5.5)

20	Segmento c'	Segmento[E', F'$_1$]	c' = 7.46
21	Punto G'	Trasla[G, u]	G' = (16.96, -0.38)
22	Punto F'	Trasla[F, u]	F' = (11.26, -5.5)
23	Segmento d'	Segmento[G', F']	d' = 7.66
24	Angolo α'	Angolo[E', H, G']	α' = 41.47°
25	Circonferenza e	Circonferenza[H, a]	e: $(x - 11.26)^2 + (y + 5.5)^2 = 7.4$
26	Punto I	Intersezione[e, d', 1]	I = (13.28, -3.68)
27	Circonferenza f	Circonferenza[H, b]	f: $(x - 11.26)^2 + (y + 5.5)^2 = 30.03$
28	Punto J	Intersezione[f, c', 1]	J = (16.74, -5.46)
29	Triangolo poli1	Poligono[J, H, I]	poli1 = 4.94
29	Segmento i	Segmento[J, H, poli1]	i = 5.48
29	Segmento j	Segmento[H, I, poli1]	j = 2.72
29	Segmento h	Segmento[I, J, poli1]	h = 3.88

COSTRUZIONE 3: SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI



Protocollo di costruzione 3 – Secondo criterio di congruenza dei triangoli			
N.	Nome	Comando	Valore

1	Testo testo1		testo1 = "SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI"
2	Testo testo2		testo2 = "Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e gli angoli ad esso adiacenti."
3	Testo testo3		testo3 = "Costruiamo un triangolo noti un lato AB e gli angoli α e β ad esso adiacenti. Per eseguirla basta trasportare gli angoli, con un opportuna trasformazione, in modo che siano adiacenti ad un segmento congruente ad AB. Anche in questo caso il triangolo ottenuto è univocamente determinato dai dati assegnati, e l'unicità garantisce la congruenza. Tracciato il segmento AB traccia gli angoli α e β in modo che i lati CD ed FG giacciano su rette parallele ad AB, questo garantisce che nella traslazione le loro immagini giacciano sull'immagine di AB. Per trasportare β con il giusto orientamento è necessario effettuare una trasformazione composta, costituita da una traslazione cha porta F su B' e da una simmetria assiale rispetto alla perpendicolare ad A'B' passante per B'. Il punto d'intersezione dei lati degli angoli costituisce il terzo vertice del triangolo. "
4	Punto A		A = (-2.84, 3.56)
5	Punto B		B = (4.48, 3.52)
6	Segmento a	Segmento[A, B]	a = 7.32
7	Punto C		C = (-2.84, 1.04)
8	Retta b	Retta[C, a]	b: 0.04x + 7.32y = 7.5
9	Punto D	Punto[b]	D = (2.43, 1.01)
10	Punto E		E = (2.44, 3.14)
11	Angolo α	Angolo[D, C, E]	α = 22°
12	Segmento c	Segmento[C, E]	c = 5.68
13	Segmento d	Segmento[D, C]	d = 5.27
14	Punto F		F = (-2.9, -2.42)
15	Retta e	Retta[F, a]	e: 0.04x + 7.32y = -17.83
16	Punto G	Punto[e]	G = (2.49, -2.45)
17	Punto H		H = (2.44, 0.52)
18	Angolo β	Angolo[G, F, H]	β = 29.15°
19	Segmento f	Segmento[G, F]	f = 5.39
20	Segmento g	Segmento[F, H]	g = 6.1

21	Punto I		I = (7.74, -4.24)
22	Vettore u	Vettore[A, I]	u = (10.58, -7.8)
23	Punto A'	Trasla[A, u]	A' = (7.74, -4.24)
24	Punto B'	Trasla[B, u]	B' = (15.06, -4.28)
25	Segmento a'	Segmento[A', B']	a' = 7.32
26	Vettore v	Vettore[C, I]	v = (10.58, -5.28)
27	Punto D'	Trasla[D, v]	D' = (13.01, -4.27)
28	Punto C'_1	Trasla[C, v]	C'_1 = (7.74, -4.24)
29	Segmento d'	Segmento[D', C'_1]	d' = 5.27
30	Punto C'	Trasla[C, v]	C' = (7.74, -4.24)
31	Punto E'	Trasla[E, v]	E' = (13.02, -2.14)
32	Segmento c'	Segmento[C', E']	c' = 5.68
33	Vettore w	Vettore[F, B']	w = (17.96, -1.86)
34	Punto G'	Trasla[G, w]	G' = (20.45, -4.31)
35	Punto F'_1	Trasla[F, w]	F'_1 = (15.06, -4.28)
36	Segmento f'	Segmento[G', F'_1]	f' = 5.39
37	Punto F'	Trasla[F, w]	F' = (15.06, -4.28)
38	Punto H'	Trasla[H, w]	H' = (20.4, -1.34)
39	Segmento g'	Segmento[F', H']	g' = 6.1
40	Retta h	Perpendicolare[F', a']	h: -7.32x + 0.04y = -110.41
41	Punto G''	Simmetrico[G', h]	G'' = (9.67, -4.25)
42	Punto J	Simmetrico[F'_1, h]	J = (15.06, -4.28)
43	Segmento f''	Segmento[G'', J]	f'' = 5.39
44	Punto F''	Simmetrico[F', h]	F'' = (15.06, -4.28)
45	Punto H''	Simmetrico[H', h]	H'' = (9.75, -1.28)
46	Segmento g''	Segmento[F'', H'']	g'' = 6.1
47	Punto K	Intersezione[c', g'']	K = (11.99, -2.55)
48	Angolo α'	Angolo[D', I, E']	α' = 22°
49	Angolo β''	Angolo[H'', F'', G'']	β'' = 29.15°
50	Angolo β'	Angolo[G', F'', H']	β' = 29.15°

51	Triangolo poli1	Poligono[F'', I, K]	poli1 = 6.28
51	Segmento k	Segmento[F'', I, poli1]	k = 7.32
51	Segmento f''_1	Segmento[I, K, poli1]	f''_1 = 4.58
51	Segmento i	Segmento[K, F'', poli1]	i = 3.52

ESERCIZI

1. Dati i lati AB, BC e AC costruisci il triangolo ABC. E' sempre possibile costruire il triangolo? La costruzione è unica o si possono costruire più triangoli aventi gli stessi lati e angoli diversi?

2. Disegna due triangoli, ABC e DEF, che abbiano AB≡DE, AC≡DF e in cui l'angolo esterno di vertice A sia congruente a quello esterno di vertice D. Verifica, misurando gli elementi opportuni, che i due triangoli sono congruenti. Quale criterio di congruenza puoi usare per giustificare la tesi?

APPUNTI…

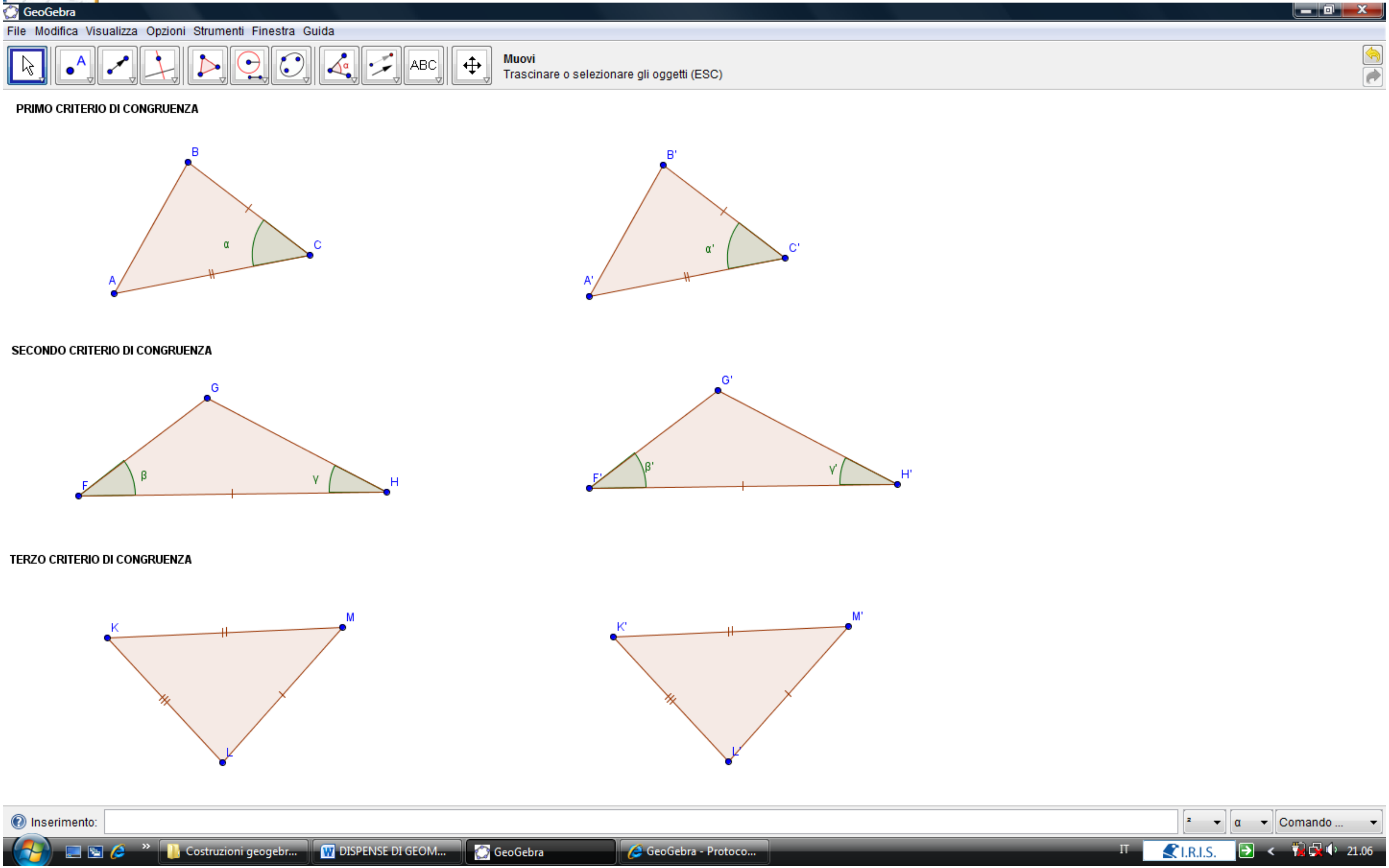
In generale per verificare la congruenza di due figure piane a partire dalla definizione di congruenza sarebbe necessario verificare o che esse si corrispondono in una trasformazione rigida oppure che vi è una congruenza di tutti i lati e di tutti gli angoli. Nella pratica ciò può risultare molto laborioso oltre che inutile poiché è possibile dimostrare che è ***sufficiente*** confrontare un numero limitato di elementi delle due figure per essere certi della loro congruenza.
Come hai visto nelle costruzioni precedenti se confrontiamo due lati e l'angolo fra essi compreso o un lato e gli angoli ad esso adiacenti la congruenza è garantita dall'unicità della costruzione.
Diciamo allora che è possibile enunciare dei *criteri di congruenza*, cioè dei teoremi che indicano il "minimo" di elementi che è necessario confrontare affinchè si possa affermare la congruenza fra due figure piane.
Per i triangoli si possono enunciare quattro criteri di congruenza, tre criteri fondamentali e un quarto criterio che è la generalizzazione del secondo, oltre a criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli.

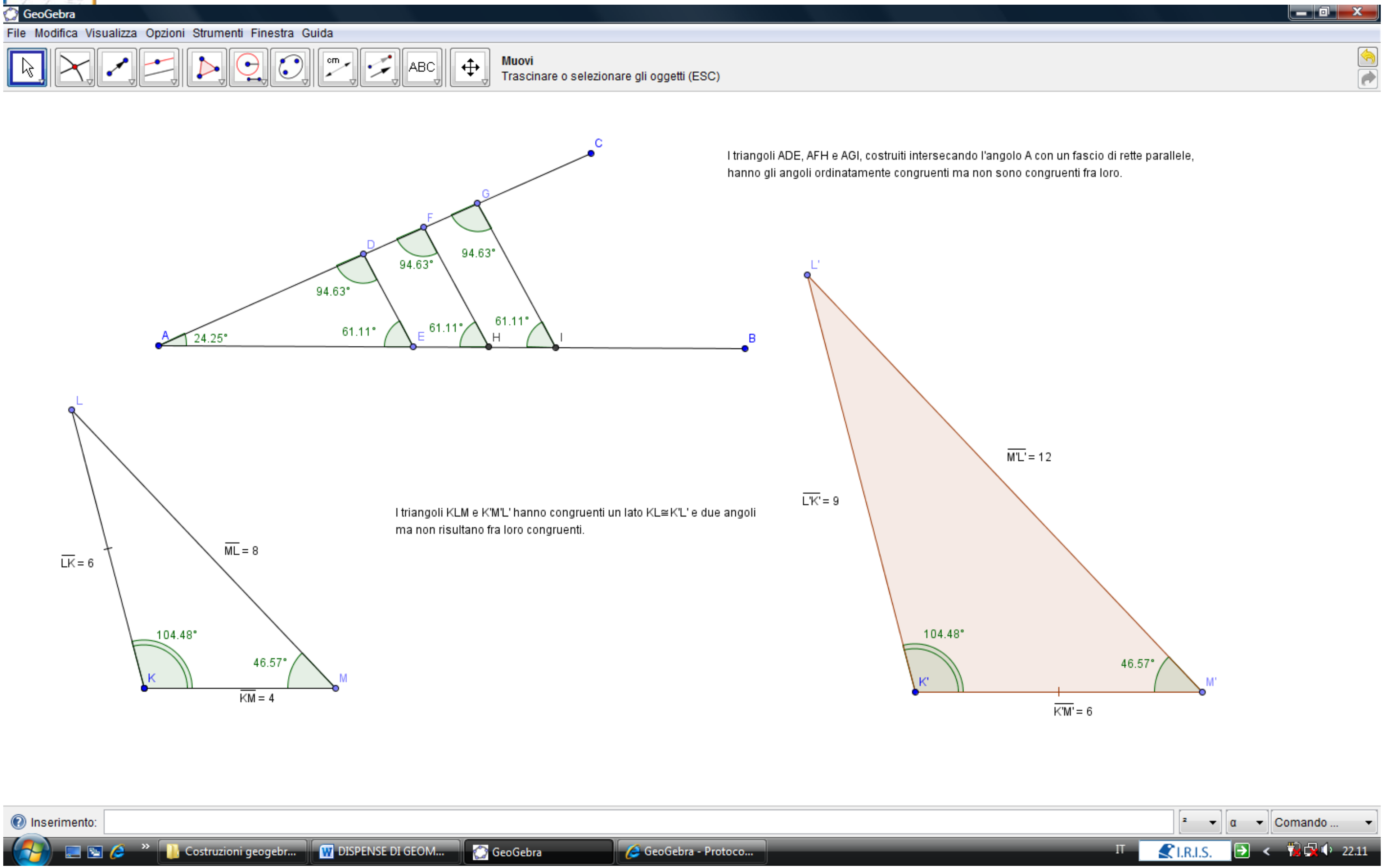
Enunciamo i tre principali **criteri di congruenza dei triangoli**:

- Primo criterio: "Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti due lati e l'angolo fra essi compreso."
- Secondo criterio: "Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un lato e gli angoli ad esso adiacenti."
- Terzo criterio: "Due triangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti i tre lati."

E' importante osservare che in tutti i criteri compare l'avverbio 'ordinatamente' perché le figure sul piano non sempre si trovano nella stessa posizione è quindi importante verificare che ad essere congruenti siano lati corrispondenti.

Per verificare la congruenza fra due triangoli occorre quindi individuare tre coppie di elementi corrispondenti fra loro congruenti così come indicato in almeno uno dei criteri di congruenza, tre coppie generiche di elementi infatti non garantiscono la congruenza, ad esempio non sono congruenti due triangoli con tre angoli ordinatamente congruenti o due triangoli aventi un lato e due angoli qualsiasi ordinatamente congruenti.


GeoGebra
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Muovi
Trascinare o selezionare gli oggetti (ESC)
PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA
B
C
A
α
B'
C'
A'
α'
SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA
G
F
H
β
γ
G'
F'
H'
β'
γ'
TERZO CRITERIO DI CONGRUENZA
K
M
L
K'
M'
L'
Inserimento:
Comando ...
Costruzioni geogebr...
DISPENSE DI GEOM...
GeoGebra
GeoGebra - Protoco...
IT
21.06


GeoGebra
File Modifica Visualizza Opzioni Strumenti Finestra Guida
Muovi
Trascinare o selezionare gli oggetti (ESC)
I triangoli ADE, AFH e AGI, costruiti intersecando l'angolo A con un fascio di rette parallele, hanno gli angoli ordinatamente congruenti ma non sono congruenti fra loro.
A
B
C
D
E
F
G
H
I
24.25°
94.63°
61.11°
I triangoli KLM e K'M'L' hanno congruenti un lato KL≅K'L' e due angoli ma non risultano fra loro congruenti.
L
K
M
LK = 6
ML = 8
KM = 4
104.48°
46.57°
L'
K'
M'
L'K' = 9
M'L' = 12
K'M' = 6
Inserimento:
Comando ...
Costruzioni geogebr...
DISPENSE DI GEOM...
GeoGebra
GeoGebra - Protoco...
I.R.I.S.
22.11